L 3 - Sciences Physiques et Chimiques. Electromagnétisme de la matière
session 2 de 2009-2010.

I) Le champ auxilliaire est $\vec{E}^* = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r}$ pour $r < R$

Le potentiel créé par la matière polarisée à l'intérieur est donc : $V_{m,in} = \frac{\vec{P}}{\rho_0}\cdot\vec{E}^* = \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{3\varepsilon_0}$

Le champ électrique créé par la matière à l'intérieur de la sphère ($r < R$) est donc $\vec{E}_{m,in} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$.

Le champ à l'intérieur est donc :

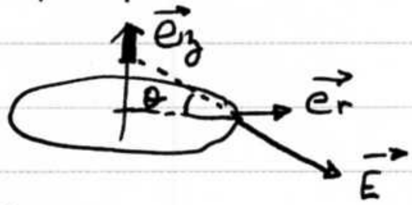
$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_a + \vec{E}_{m,in} = \vec{E}_a - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = \vec{E}_a - \frac{1}{3\varepsilon_0}\left(\varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_{in}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{in}\left(1+\frac{\chi_e}{3}\right) = \vec{E}_a \Rightarrow \vec{E}_{in} = \frac{3\vec{E}_a}{3+\chi_e} \Rightarrow \vec{P} = \frac{3\chi_e\varepsilon_0}{3+\chi_e}\vec{E}_a$$

$$\vec{P} = \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{2+\varepsilon_r}\varepsilon_0\vec{E}_a \qquad \text{et } \vec{p} = \vec{P} \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

II) 1) Soit $\vec{E}$ le champ électrique crée par le proton et agissant sur l'électron : $\vec{E} = E_z\cdot(-\vec{e_z}) + E_r\cdot(\vec{e_r})$

où $\vec{e_z}$ est le vecteur unitaire de l'axe perpendiculaire au plan de la trajectoire.



A l'équilibre électrostatique :

$$\frac{E_z}{E_r} = \frac{E_a}{E_r} = \frac{E_a}{\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}{e}\cdot E_a$$

D'où $\tan\theta = \frac{d}{a_0} = \frac{E_z}{E_r} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a_0^2 E_a}{e}$ et $d = \frac{4\pi\varepsilon_0 a_0^3 E_a}{e}$

2) Le moment dipolaire est $p = ed = 4\pi\varepsilon_0 a_0^2 E_a$

or $p = \alpha_e \varepsilon_0 E_a \Rightarrow \alpha_e = 4\pi a_0^3$

III. Fluide à molécules non polaires.

Considérons le moment dipolaire d'une molécule

$$\vec{p} = \alpha\,\varepsilon_0\,\vec{E}_\ell = \alpha\,\varepsilon_0\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right)$$

Lorentz

milieu isotrope

$$\vec{P} = \underbrace{N}_{m^{-3}}\,\vec{p} = N\,\alpha\,\varepsilon_0\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) \quad \text{d'où}$$

$$\vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - \underbrace{\frac{N\alpha}{3}}}\,\varepsilon_0\,\vec{E}$$

ce terme, inférieur à 1, traduit la "correction de champ local".

IV. Drude. 1) $m\dfrac{d^2\vec{s}}{dt^2} = (-e)\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right) - \dfrac{m}{\tau}\dfrac{d\vec{s}}{dt} - m\omega_0^2\vec{s}$

τ est le "temps de relaxation du moment $m\dfrac{d\vec{s}}{dt}$.

2) $\underline{\vec{E}} = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$ et $\underline{\vec{s}} = \vec{S}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$

$$-m\omega^2\underline{\vec{S}} = (-e)\,\underline{\vec{\mathcal{E}}} + i\,\frac{m\omega}{\tau}\,\underline{\vec{S}} - m\omega_0^2\,\underline{\vec{S}}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{S}} = -\frac{e}{m}\cdot\frac{\underline{\vec{\mathcal{E}}}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\dfrac{\omega}{\tau}}$$

$$\underline{\vec{P}} = N(-e)\,\underline{\vec{S}} = \frac{Ne^2}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}\,\underline{\vec{\mathcal{E}}}$$

3) $$\underline{\vec{P}} = \underbrace{\underbrace{\frac{Ne^2}{m\omega_0^2\,\varepsilon_0}}_{\chi(0)}\cdot\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\dfrac{\omega}{\tau}}}_{\chi(\omega) = \varepsilon_r(\omega) - 1 = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)}\cdot\varepsilon_0\,\underline{\vec{\mathcal{E}}}$$

$$\Rightarrow \chi'(\omega) = \chi(0)\,\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\,\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}} = \varepsilon_r'(\omega) - 1$$

$$\chi''(\omega) = \chi(0)\,\frac{\omega\cdot\omega_0^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}} = \varepsilon_r''(\omega).$$

4) $\chi(0) = \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$. La pulsation "plasma" ω_p est la pulsation propre de l'oscillation collective des charges.

L3 Sc. Phys. et Chim. Electromagnétisme.

VI. Propagation d'une O.P.P.M. dans la matière ($\rho_{au} = 0$, $\vec{J}_{au} = \vec{0}$)

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

1. $\mathrm{rot}\, \underline{\vec{E}_0} - i\omega\, \underline{\vec{B}_0} = 0$ $\qquad$ $\mathrm{div}\, \underline{\vec{B}_0} = 0$

$\mathrm{rot}\, \underline{\vec{H}_0} + i\omega\, \underline{\vec{D}_0} = 0$ $\qquad$ $\mathrm{div}\, \underline{\vec{D}_0} = 0$

où $\underline{\vec{H}_0} = \underline{\vec{B}_0}/\mu_0$; milieu l.h.i. $\underline{\vec{D}_0} = \underline{\varepsilon_r}(\omega) \cdot \varepsilon_0 \cdot \underline{\vec{E}_0}$

2. $\mathrm{rot}\, \underline{\vec{B}_0} + i \frac{\omega}{c^2} \cdot \underline{\varepsilon_r}\, \underline{\vec{E}_0} = \vec{0}$ (en combinant les équations).

3. $\mathrm{div}\, \underline{\vec{D}} = \mathrm{div}\left[\underline{\varepsilon_r}(\omega) \cdot \underline{\vec{E}_0}\right] = \underbrace{\underline{\varepsilon_r}(\omega) \cdot \mathrm{div}\, \underline{\vec{E}_0}}_{\text{(car l.h.i.)}} = 0$

4. 2 possibilités.

a) $\underline{\varepsilon_r}(\omega) = 0 \Rightarrow \underline{\vec{D}_0} = \vec{0}$

$\mathrm{rot}\, \underline{\vec{B}_0} = \vec{0}$ mais de plus $\mathrm{div}\, \underline{\vec{B}_0} = 0$ donc $\underline{\vec{B}_0} = \vec{0}$

L'onde est purement électrique et $\mathrm{rot}\, \underline{\vec{E}_0} = i\omega\, \underline{\vec{B}_0} = \vec{0}$

soit $\underbrace{i\vec{k} \times \underline{\vec{E}_0}}_{\text{rot en notation complexe}} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ le champ $\underline{\vec{E}_0}$ est longitudinal $\underline{\vec{E}_0} /\!/ \vec{k}$.

exemples : onde de plasma, vibrations harmoniques longitudinales des ions dans les solides.

b) $\mathrm{div}\, \underline{\vec{E}_0} = 0$ soit $\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}_0} = 0$ $\Rightarrow$ onde transverse.

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\, \underline{\vec{E}_0}) = \vec{\mathrm{grad}}\,\underbrace{(\mathrm{div}\, \underline{\vec{E}_0})}_{0} - \Delta \underline{\vec{E}_0}$$

M.F.

$$\vec{\mathrm{rot}}\,(i\omega\, \underline{\vec{B}_0}) = i\omega\, \underbrace{\mathrm{rot}\, \underline{\vec{B}_0}}_{\text{MA}} = i\omega\left(-\frac{i\omega}{c^2}\, \underline{\varepsilon_r}\, \underline{\vec{E}_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\Delta \underline{\vec{E}_0} + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \underline{\varepsilon_r} \cdot \underline{\vec{E}_0} = \vec{0}}_{\text{Equation d'onde}}}$$ et la même relation pour $\underline{\vec{B}_0}$.

Solutions avec vecteur d'onde complexe : $\underline{\vec{E}_0} = \underline{\vec{E}_m}\, e^{i\underline{\vec{k}} \cdot \vec{r}}$

$$\Delta \underline{\vec{E}_0} = -\underline{k}^2 \cdot \underline{\vec{E}_0} \Rightarrow -\underline{k}^2 \cdot \underline{\vec{E}_m} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\varepsilon_r} \cdot \underbrace{\underline{\vec{E}_m}}_{\text{choisi réel}} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Relation de dispersion :

$$\boxed{\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\, \underline{\varepsilon_r}(\omega) = 0}$$